PART2　階差数列と一般項，和と一般項

2　［1］　次の数列の一般項を求めよ。

$$1,\ 2,\ 4,\ 10,\ 23,\ 46,\ 82,\ 134,\ \cdots\cdots$$

［2］　初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n(n+1)$ で表される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　和 $a_1+a_3+a_5+\cdots\cdots+a_{2n-1}$ を求めよ。

Point Pickup

［1］　数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を調べても規則性がつかめないときは，数列 $\{b_n\}$ の階差数列 $\{c_n\}$ を調べてみるとよい。

［2］　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$n \geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}$　　　$n=1$ のとき　$a_1=S_1$

数列 $a_1,\ a_3,\ a_5,\ \cdots\cdots$ の第 k 項は a_{2k-1} であり，数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n において n に $2k-1$ を代入して求めることができる。

第 2 講　PART2　確認問題

1　次の数列の一般項を求めよ。

2，3，3，3，4，7，13，23，……

$$\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\left(n^3-\boxed{ウ}n^2+\boxed{エオ}n-\boxed{カ}\right)$$

2　初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2n^2+7n$ で表される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_n=\boxed{キ}n+\boxed{ク}$$

(2)　和 $a_2+a_4+a_6+\cdots\cdots+a_{2n}$ を求めよ。

$$\boxed{ケ}n^2+\boxed{コ}n$$

PART2　階差数列と一般項，和と一般項

2　［1］　次の数列の一般項を求めよ。

$1,\ 2,\ 4,\ 10,\ 23,\ 46,\ 82,\ 134,\ \cdots\cdots$

［2］　初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n(n+1)$ で表される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　和 $a_1+a_3+a_5+\cdots\cdots+a_{2n-1}$ を求めよ。

［1］　与えられた数列を $\{a_n\}$，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$，数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とする。

$\{a_n\}$：$1,\ 2,\ 4,\ 10,\ 23,\ 46,\ 82,\ 134,\ \cdots\cdots$

$\{b_n\}$：$1,\ 2,\ 6,\ 13,\ 23,\ 36,\ 52,\ \cdots\cdots$

$\{c_n\}$：$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ \cdots\cdots$

数列 $\{c_n\}$ は，初項 1，公差 3 の等差数列であるから

$$c_n=1+(n-1)\cdot 3=3n-2$$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k-2)=1+3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-2(n-1)=\frac{1}{2}(3n^2-7n+6)$$

この式において，$n=1$ のとき $\frac{1}{2}(3\cdot 1^2-7\cdot 1+6)=1$ であり，b_1 と一致する。

したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(3k^2-7k+6)$$

$$=1+\frac{1}{2}\left\{3\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-7\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+6(n-1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(n^3-5n^2+10n-4)$$

この式において，$n=1$ のとき $\frac{1}{2}(1^3-5\cdot 1^2+10\cdot 1-4)=1$ であり，a_1 と一致する。

よって，求める数列の一般項は

$$a_n=\frac{1}{2}(n^3-5n^2+10n-4)$$

［2］ (1) $a_1=S_1=1\cdot 2=2$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=n(n+1)-(n-1)n=2n$$

この式で，$n=1$ のとき $2\cdot 1=2$ であり，a_1 と一致する。

したがって　$a_n=2n$

(2) 数列 a_1，a_3，a_5，…… の第 k 項は $a_{2k-1}=2(2k-1)$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}=2\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\left\{2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n\right\}=2n^2$$

第 2 講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：6，ウ：9，エオ：26，カ：6

[解説]

与えられた数列を $\{a_n\}$，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$，数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とする。[A]

$\{a_n\}$：2，3，3，3，4，7，13，23，……

$\{b_n\}$：1，0，0，1，3，6，10，……

$\{c_n\}$：−1，0，1，2，3，4，……

数列 $\{c_n\}$ は，初項 −1，公差 1 の等差数列であるから

$$c_n=-1+(n-1)\cdot 1=n-2$$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k-2) \quad \text{[B]}$$

$$=1+\frac{1}{2}(n-1)n-2(n-1) \quad \text{[C]}$$

$$=\frac{1}{2}(n^2-5n+6)$$

この式において，$n=1$ のとき $\frac{1}{2}(1^2-5\cdot 1+6)=1$

であるから，b_1 と一致する。

したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}(k^2-5k+6) \quad \text{[B]}$$

$$=2+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-5\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+6(n-1)\right\} \quad \text{[C]}$$

$$=\frac{1}{6}(n^3-9n^2+26n-6)$$

この式において，

$n=1$ のとき

[A]　数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を調べても規則性がつかめないときは，数列 $\{b_n\}$ の階差数列 $\{c_n\}$ を調べてみるとよい。

[B]　階差数列
数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

[C]　和の公式

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}c=nc \quad (c\text{ は定数})$$

特に　$\sum_{k=1}^{n}1=n$

$\frac{1}{6}(1^3-9\cdot1^2+26\cdot1-6)=2$ であるから，

a_1 と一致する。

よって，求める数列の一般項は

$$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{6}(n^3-9n^2+26n-6)}$$

2

[正解] キ：4，ク：5，ケ：4，コ：9

[解説]

(1)　$a_1=S_1=2\cdot1^2+7\cdot1=9$ [D]

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=2n^2+7n-\{2(n-1)^2+7(n-1)\}$$
$$=4n+5$$

この式において，$n=1$ のとき $4+5=9$ であるから，a_1 と一致する。

したがって　$\boldsymbol{a_n=4n+5}$

(2)　数列 a_2，a_4，a_6，…… の第 k 項は

$$a_{2k}=4\cdot2k+5=8k+5$$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=\sum_{k=1}^{n}(8k+5)$$ [C]

$$=8\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+5n$$
$$=\boldsymbol{4n^2+9n}$$

[D]　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると
　$n\geqq2$ のとき
　　$a_n=S_n-S_{n-1}$
　$n=1$ のとき
　　$a_1=S_1$